DEMOSTRACIÓN DE LA ENERGÍA DEL TORAX EN LA DESFIBRILACIÓN SUBAMORTIGUADA

Ecuación de la Energía del tórax E_T.

$$E_T = \int_0^{Td} id(t)^2 R_T \, dt$$

Corriente en función del tiempo

$$id(t) = \frac{Vm_2}{wL} e^{-\beta t} sen(wt)$$

Ecuación de la Energía Almacenada E_A.

$$E_A = \frac{1}{2} Vm_2{}^2 C$$

El siguiente desarrollo consiste en demostrar que la Energía del tórax es igual a:

$$E_T = \frac{R_T}{R_\Sigma} E_A$$

DEMOSTRACIÓN

$$E_T = \int_0^{Td} \left(\frac{Vm_2}{wL} e^{-\beta t} sen(wt) \right)^2 R_T \, dt$$

$$E_T = \frac{Vm_2{}^2}{w^2 L^2} R_T \int_0^{Td} e^{-2\beta t} sen^2(wt) dt$$

Se desarrolla la integral:

$$\int_0^{Td} e^{-2\beta t} sen^2(wt) dt$$

Para poder realizar un mejor desarrollo se hace el siguiente reemplazo:

$$sen^2(wt) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2wt))$$

De esta manera la integral quedaría:

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{Td} e^{-2\beta t}\left(1-\cos(2wt)\right)dt$$

$$\frac{1}{2}\left[\int_{0}^{Td} e^{-2\beta t}dt - \int_{0}^{Td} e^{-2\beta t}\cos(2wt)dt\right]$$

Se desarrolla cada integral por aparte y luego se agrupa:

1. $\int_0^{Td} e^{-2\beta t}dt = -\frac{1}{2\beta}e^{-2\beta t}$

2. $\int_0^{Td} e^{-2\beta t}\cos(2wt)dt$ Para poder desarrollar la integral se realiza por partes:

$u = e^{-2\beta t}$ $\quad\quad dV = \cos(2wt)dt$

$du = -2\beta e^{-2\beta t}dt$ $\quad\quad V = \frac{1}{2w}sen(2wt)$, Entonces: $\quad uV - \int Vdu$

$$= \frac{e^{-2\beta t}}{2w}sen(2wt) - \left(-\frac{2\beta}{2w}\int_0^{Td} e^{-2\beta t}sen(2wt)dt\right)$$

$= \frac{e^{-2\beta t}}{2w}sen(2wt) + \frac{\beta}{w}\int_0^{Td} e^{-2\beta t}sen(2wt)dt$; para desarrollar esta integral nuevamente se realiza por partes:

$u = e^{-2\beta t}$ $\quad\quad dV = sen(2wt)dt$

$du = -2\beta e^{-2\beta t}dt$ $\quad\quad V = -\frac{1}{2w}\cos(2wt)$, Entonces: $\quad uV - \int Vdu$

$$= -\frac{e^{-2\beta t}}{2w}\cos(2wt) - \frac{\beta}{w}\int_0^{Td} e^{-2\beta t}\cos(2wt)dt$$

Se reemplaza este último desarrollo en la integral anterior:

$$= \frac{e^{-2\beta t}}{2w}sen(2wt) + \frac{\beta}{w}\left[-\frac{e^{-2\beta t}}{2w}\cos(2wt) - \frac{\beta}{w}\int_0^{Td} e^{-2\beta t}\cos(2wt)dt\right]$$

La última integral que se obtuvo es igual a la original, quedando una integral circular. Para desarrollarla se agrupa quedando:

$$\int_0^{Td} e^{-2\beta t}\cos(2wt)dt = \frac{e^{-2\beta t}}{2w}sen(2wt) - \frac{\beta}{2w^2}e^{-2\beta t}\cos(2wt) - \frac{\beta^2}{w^2}\int_0^{Td} e^{-2\beta t}\cos(2wt)dt$$

$$\int_0^{Td} e^{-2\beta t}\cos(2wt)dt + \frac{\beta^2}{w^2}\int_0^{Td} e^{-2\beta t}\cos(2wt)dt = \frac{e^{-2\beta t}}{2w}sen(2wt) - \frac{\beta}{2w^2}e^{-2\beta t}\cos(2wt)$$

$$\int_0^{Td} e^{-2\beta t}\cos(2wt)dt\left(1+\frac{\beta^2}{w^2}\right) = \frac{e^{-2\beta t}}{2w}sen(2wt) - \frac{\beta}{2w^2}e^{-2\beta t}\cos(2wt)$$

$$\int_0^{Td} e^{-2\beta t}\cos(2wt)dt = \frac{\frac{e^{-2\beta t}}{2w} sen(2wt) - \frac{\beta}{2w^2} e^{-2\beta t}\cos(2wt)}{\left(1+\frac{\beta^2}{w^2}\right)}$$

$$\int_0^{Td} e^{-2\beta t}\cos(2wt)dt = \frac{\frac{w e^{-2\beta t} sen(2wt) - \beta e^{-2\beta t}\cos(2wt)}{2w^2}}{\frac{w^2+\beta^2}{w^2}}$$

El desarrollo de la integral será:

$$\int_0^{Td} e^{-2\beta t}\cos(2wt)dt = \frac{w e^{-2\beta t} sen(2wt) - \beta e^{-2\beta t}\cos(2wt)}{2\left(w^2+\beta^2\right)}$$

Entonces, se reemplaza las respuestas 1 y 2 se obtiene:

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^{Td} e^{-2\beta t}dt - \int_0^{Td} e^{-2\beta t}\cos(2wt)dt\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2\beta}e^{-2\beta t} - \frac{w e^{-2\beta t} sen(2wt) - \beta e^{-2\beta t}\cos(2wt)}{2(w^2+\beta^2)}\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2\beta}e^{-2\beta t} - \frac{w e^{-2\beta t} sen(2wt))}{2(w^2+\beta^2)} + \frac{\beta e^{-2\beta t}\cos(2wt)}{2(w^2+\beta^2)}\right]_0^{Td}$$

Se reemplazan los límites:

$$\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\left(-\frac{1}{2\beta}e^{-2\beta Td} - \frac{w e^{-2\beta Td} sen(2wTd))}{2(w^2+\beta^2)} + \frac{\beta e^{-2\beta Td}\cos(2wTd)}{2(w^2+\beta^2)}\right) - \\ \left(-\frac{1}{2\beta}e^{0} - \frac{w e^{0} sen(0))}{2(w^2+\beta^2)} + \frac{\beta e^{0}\cos(0)}{2(w^2+\beta^2)}\right)\end{array}\right]$$

Cuando la Exponencial de euler es Td, ésta función tiende a cero, por lo tanto, el límite válido es en cero; quedando:

$$\frac{1}{2}\left[-\left(-\frac{1}{2\beta}e^{0} - \frac{w e^{0} sen(0))}{2(w^2+\beta^2)} + \frac{\beta e^{0}\cos(0)}{2(w^2+\beta^2)}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\beta} - \frac{\beta}{2(w^2+\beta^2)}\right]$$

Después de tener el resultado de la integral, la energía del tórax queda:

$$E_T = \frac{Vm_2^{\ 2}}{w^2 L^2} R_T \int_0^{Td} e^{-2\beta t} sen^2 (wt) dt$$

$$E_T = \frac{Vm_2^{\ 2}}{w^2 L^2} R_T \left(\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\beta} - \frac{\beta}{2(w^2+\beta^2)} \right] \right)$$

$$E_T = \frac{Vm_2^{\ 2}}{2w^2 L^2} R_T \left[\frac{1}{2\beta} - \frac{\beta}{2(w^2+\beta^2)} \right]$$

Esta energía queda en función de β y ω, pero cada uno es:

$$\beta = \frac{R_\Sigma}{2L} \qquad w = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_\Sigma}{2L}\right)^2}$$

Al desarrollar cada una de estas se obtiene:

3. $\frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2\left(\frac{R_\Sigma}{2L}\right)} = \frac{1}{\frac{R_\Sigma}{L}} = \frac{L}{R_\Sigma}$

4. $\frac{\beta}{2(w^2+\beta^2)} = \frac{\frac{R_\Sigma}{2L}}{2\left(\left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_\Sigma}{2L}\right)^2}\right]^2 + \left[\frac{R_\Sigma}{2L}\right]^2\right)} = \frac{\frac{R_\Sigma}{2L}}{2\left(\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_\Sigma}{2L}\right)^2 + \left(\frac{R_\Sigma}{2L}\right)^2\right)} = \frac{\frac{R_\Sigma}{2L}}{\frac{2}{LC}} = \frac{CR_\Sigma}{4}$

Reemplazamos las respuestas 3 y 4 en la ecuación de la Energía del tórax:

$$E_T = \frac{Vm_2^{\ 2}}{2w^2 L^2} R_T \left[\frac{1}{2\beta} - \frac{\beta}{2(w^2+\beta^2)} \right]$$

$$E_T = \frac{Vm_2^{\ 2}}{2w^2 L^2} R_T \left[\frac{L}{R_\Sigma} - \frac{CR_\Sigma}{4} \right]$$

Reemplazo ω^2:

$$w^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R_\Sigma}{2L}\right)^2$$

$$E_T = \frac{Vm_2^{\ 2}}{2L^2\left(\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_\Sigma}{2L}\right)^2\right)} R_T \left[\frac{L}{R_\Sigma} - \frac{CR_\Sigma}{4} \right]$$

$$E_T = \frac{Vm_2^{\ 2}}{2L^2\left(\frac{1}{LC} - \frac{R_\Sigma^{\ 2}}{4L^2}\right)} R_T \left[\frac{L}{R_\Sigma} - \frac{CR_\Sigma}{4} \right]$$

$$E_T = \frac{Vm_2^{\ 2}}{2L^2\left(\frac{4L - CR_\Sigma^{\ 2}}{4L^2C}\right)} R_T \left[\frac{4L - CR_\Sigma^{\ 2}}{4R_\Sigma}\right]$$

$$E_T = \frac{2CVm_2^{\ 2}}{4L - CR_\Sigma^{\ 2}} R_T \left[\frac{4L - CR_\Sigma^{\ 2}}{4R_\Sigma}\right]$$

$$E_T = \frac{CVm_2^{\ 2}}{2R_\Sigma} R_T$$

Pero como se sabe que $E_A = \frac{1}{2} Vm_2^{\ 2} C$

Entonces la energía del tórax será:

$$\boxed{E_T = \frac{R_T}{R_\Sigma} E_A}$$